Nicht f. d. Austausch

EINIGE ABSCHÄTZUNGEN FÜR DIE KOEFFIZIENTEN DER TEILER EINES POLYNOMS

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

KARL-FRIEDRICH KIRSTEIN
AUS BERLIN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 24. FEBRUAR 1937
TAG DER PROMOTION: 10. NOVEMBER 1937

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N 73

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT
PROFESSOR DR. E. TORNIER

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin" / Band 3

Einleitung.

Herr SIEGEL bewies[1]) einen Satz, der in einer für unsere Zwecke etwas geänderten Formulierung folgendermaßen lautet:

Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit beliebigen Koeffizienten, deren absolute Beträge das Maximum A haben. Dividiert man $f(x)$ durch den zugehörigen Linearfaktor:

$$\frac{f(x)}{\lambda - x} = g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1},$$

so gibt es für die absoluten Beträge der Koeffizienten des Teilers $g(x)$ eine von λ unabhängige obere Schranke, die nur von A und dem Grad n des Polynoms $f(x)$ abhängt. Genauer ist, wenn noch

$$B = \mathrm{Max}\,(|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_{n-1}|)$$

gesetzt wird, $$B \leqq nA.$$

Gelegentlich eines Vortrages über die SIEGELsche Arbeit im Berliner Mathematischen Seminar von Herrn Professor I. SCHUR wurde darauf hingewiesen, daß dieser Satz an und für sich interessant sei, und eine Untersuchung der einzelnen Quotienten

$$Q_k = \frac{|b_k|}{A}$$

bezüglich einer Abschätzung nach oben empfohlen. Dabei sollte versucht werden, die von Herrn SIEGEL angegebene obere Schranke

$$\frac{B}{A} \leqq n$$

zu verbessern und nach Möglichkeit die obere Grenze beziehungsweise das Maximum des Quotienten $\frac{B}{A}$ festzustellen.

Insbesondere entsteht bei näherer Betrachtung die Frage, ob es für die Quotienten Q_k eine von k, aber nicht von n abhängige Ab-

---

1) C. Siegel, *Approximation algebraischer Zahlen*. Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 173—213, Hilfssatz II.

schätzung nach oben gibt — auch für den Fall der Division durch einen Faktor höheren als ersten Grades.

In der vorliegenden Arbeit werden die angeschnittenen Fragen untersucht und die gestellten Aufgaben mit elementaren Hilfsmitteln gelöst.

§ 1. Zusammenstellung der Ergebnisse.

Satz 1: *Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit beliebigen Koeffizienten und

$$A = \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|).$$

Dividiert man $f(x)$ durch den zugehörigen Linearfaktor:

$$\frac{f(x)}{\lambda - x} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$$

und setzt man

$$Q_k = \frac{|b_k|}{A} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

so gilt:

Der Quotient Q_k erreicht bei festem Grad n für das Polynom

$$f_k(x) = 1 + x + \cdots + x^k - x^{k+1} - \cdots - x^n \tag{1}$$

und den Linearfaktor $\lambda_k - x$, worin λ_k eindeutig als einzige positive Nullstelle des Polynoms (1) bestimmt ist, sein Maximum M_k. Dabei ist

$$M_k = \frac{1}{\lambda_k^{k+1}}(1 + \lambda_k + \cdots + \lambda_k^k) = 1 + \lambda_k + \cdots + \lambda_k^{n-1-k}. \tag{2}$$

Satz 2: *Bei festem Grad n wachsen die Maxima M_k vom Index 0 bis zum Index $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ monoton und fallen danach wieder monoton:*

$$M_0 < M_1 < \cdots < M_{\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$M_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} > M_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} > \cdots > M_{n-1}.$$

Für $n = 2$ erhält man $M_0 > M_1$.

Satz 3: *Das Maximum M der Maxima M_k ist für ungerades n*

$$M = \frac{n+1}{2}$$

und für gerades n

$$M = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{6}\frac{2}{n+1} + \frac{1}{45}\left(\frac{2}{n+1}\right)^3 + \frac{19}{7560}\left(\frac{2}{n+1}\right)^5 + \frac{\varepsilon}{3240}\left(\frac{2}{n+1}\right)^7$$

mit $0 < \varepsilon < 1$.

Satz 4: *Um die bestehende Abhängigkeit des Maximums M_k vom Grad n des Polynoms $f_k(x)$ anzudeuten, setze man*

$$M_k = M_k(n).$$

Dann gilt:

Bei festem Index k wachsen die Maxima $M_k(n)$ und $M_{n-1-k}(n)$ monoton mit n und konvergieren gegen die oberen Grenzen

$$\lim_{n\to\infty} M_k(n) = \frac{1}{1-2^{-\frac{1}{k+1}}} = K$$

und

$$\lim_{n\to\infty} M_{n-1-k}(n) = K - 1.$$

Unabhängig von n gelten folgende obere Schranken:

(3) $$M_k < \frac{k}{\log 2} + 2 < \frac{3}{2}k + 2$$

und

(4) $$M_{n-1-k} \leqq \frac{k}{\log 2} + 1 < \frac{3}{2}k + 1.$$

Gleichheit besteht in (4) nur für $k = 0$.

Satz 5: *Das normierte Polynom $h(x)$ vom Grade m*

$$h(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

sei ein Teiler des Polynoms

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit beliebigen Koeffizienten, und es sei wieder

$$A = \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|).$$

Bildet man $$\frac{f(x)}{h(x)} = d_0 + d_1 x + \cdots + d_{n-m} x^{n-m}$$

und setzt man $$Q_k^{(m)} = \frac{|d_k|}{A} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-m),$$

so gelten für die Quotienten $Q_k^{(m)}$ folgende von n unabhängige obere Schranken[2]*:*

(5) $$Q_k^{(m)} < \frac{1}{\log 2}(k+2)^m < \frac{3}{2}(k+2)^m$$

und

(6) $$Q_{n-m-k}^{(m)} < \frac{1}{\log 2}(k+1)^m < \frac{3}{2}(k+1)^m.$$

---

2) In den obigen Abschätzungen (5) und (6) konnte ich für $m \geqq 2$ den Faktor $\frac{1}{\log 2}$ durch die Konstante 1 ersetzen. Die hierzu erforderliche Rechnung ist aber noch umständlich und wird daher hier nicht veröffentlicht, da ich hoffe, sie noch zu vereinfachen.

In den vorstehenden Sätzen 1 bis 5 ist der Einfachheit halber der Divisor als normiertes Polynom (d. h. mit dem höchsten Koeffizienten 1) angenommen worden. Man kann aber diese Sätze auch auf Divisoren anwenden, die nicht normiert sind. In diesem Falle multiplizieren sich die Werte der gegebenen oberen Abschätzungen mit dem absoluten Betrage des Koeffizienten des höchsten Gliedes im Divisor.

Da die Abschätzungen der Sätze 4 und 5 vom Grade des Polynoms unabhängig sind, liegt es nahe, sie auf Potenzreihen zu erweitern. Dies geschieht in Zusätzen, die den Beweisen in den folgenden Paragraphen angehängt sind.

Zum Abschluß enthält § 9 als Anwendung einen Beweis für die folgende Regel, die mir von Herrn I. SCHUR angegeben wurde:

Regel: *Ist die normierte algebraische Gleichung*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + x^n = 0$$

mit beliebigen Koeffizienten vorgegeben, so setze man für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$A_\nu(\varrho) = \operatorname{Max}\left(\frac{|a_0|}{\varrho^{n-\nu}}, \frac{|a_1|}{\varrho^{n-\nu-1}}, \ldots, |a_{n-\nu}|\right),$$

worin ϱ *eine beliebig festgesetzte positive Zahl ist. Wählt man unter denjenigen Wurzeln der Gleichung, deren absoluter Betrag größer als* ϱ *ist, eine zulässige Anzahl* m *beliebiger Wurzeln* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ *mit den absoluten Beträgen* $r_1, r_2, \ldots, r_m$ *aus, so gilt*

$$(r_1 - \varrho)(r_2 - \varrho) \ldots (r_m - \varrho) < A_m(\varrho).$$

Ordnet man die absoluten Beträge aller Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ *der Größe nach*

$$r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n,$$

so gilt demnach für jedes positive ϱ *und jedes* $m = 1, 2, \ldots, n$

$$r_m < \varrho + A_m^{\frac{1}{m}}(\varrho).$$

Wie die Substitution $x = \varrho y$ lehrt, braucht dieser Satz nur für $\varrho = 1$ bewiesen zu werden.

§ 2. Beweis des Satzes 1.

Beweis: Der Fall $\lambda = 0$ kann als trivial ausgeschlossen werden, da dann $Q_k \leqq 1$ wird. Die Substitution $x = \varepsilon y$ mit beliebigem ε vom absoluten Betrage 1 lehrt, daß Q_k gegenüber Drehung invariant ist. λ kann also von vornherein positiv angenommen werden.

Durch Division findet man

$$(7) \qquad b_k = \frac{1}{\lambda^{k+1}}(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k).$$

Hieraus folgt wegen der Identität $a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n = 0$

$$(8) \qquad -b_k = a_{k+1} + a_{k+2}\lambda + \cdots + a_n\lambda^{n-1-k}.$$

Aus (7) und (8) folgen wegen $\frac{|a_\nu|}{A} \leqq 1$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ die Ungleichungen

$$Q_k \leqq \frac{1}{\lambda^{k+1}}(1 + \lambda + \cdots + \lambda^k)$$

und

$$Q_k \leqq 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1-k}.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden oberen Schranken für Q_k erhält man wieder eine obere Schranke:

$$(9) \qquad Q_k \leqq \frac{1}{\lambda^{k+1}}(1 + \lambda + \cdots + \lambda^k) = 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1-k}.$$

Für positive λ fällt die linke Seite monoton, während die rechte Seite monoton steigt. Es kann also nur eine einzige positive Wurzel λ_k geben, die der aus (9) folgenden Gleichung

$$(10) \qquad f_k(x) = 1 + x + \cdots + x^k - x^{k+1} - \cdots - x^n = 0$$

genügt. Für $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ existiert nun die positive Nullstelle λ_k mit $\frac{1}{2} < \lambda_k \leqq 1$ $\left(\text{Gleichheit besteht nur für } k = \frac{n-1}{2}\right)$, da das Polynom für $x = \frac{1}{2}$ positiv und für $x = 1$ negativ bzw. null wird. Für $k > \left[\frac{n-1}{2}\right]$ existiert die positive Nullstelle λ_k mit $1 < \lambda_k < 2$, da das Polynom für $x = 1$ positiv und für $x = 2$ negativ wird.

Dividiert man nun das Polynom $f_k(x)$ durch den zugehörigen Linearfaktor $\lambda_k - x$, so findet man, daß in diesem Falle in (9) das Gleichheitszeichen stehen muß. Q_k erreicht also hier sein Maximum M_k, und es ist

$$M_k = \frac{1}{\lambda_k^{k+1}}(1 + \lambda_k + \cdots + \lambda_k^k) = 1 + \lambda_k + \cdots + \lambda_k^{n-1-k},$$

w. z. b. w.

Anmerkung: Offenbar liefert das Polynom $Cf_k(x)$, worin C eine beliebige Konstante ist, ebenfalls das Maximum M_k. Für $k = n - 1$ ergibt jedes Polynom $f(x)$ mit $|a_n| = A$ das Maximum $Q_{n-1} = M_{n-1} = 1$. Abgesehen von diesen Fällen hat der Beweis gleichzeitig ergeben, daß das Extremalpolynom $f_k(x)$ bis auf Drehungen eindeutig bestimmt ist.

§ 3. Ein Hilfssatz.

Hilfssatz 1: *Zwischen dem Maximum M_k des k-ten Quotienten von links und dem Maximum M_{n-1-k} des k-ten Quotienten von rechts bestehen die Beziehungen*

$$M_{n-1-k} = \lambda_k M_k, \tag{11}$$

$$\lambda_{n-1-k} = \frac{1}{\lambda_k}. \tag{12}$$

Beweis: Nach § 2 ist λ_k die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$1 + x + \cdots + x^k - x^{k+1} - \cdots - x^n = 0.$$

Die positive Zahl $\frac{1}{\lambda_k}$ genügt dann der reziproken Gleichung

$$1 + x + \cdots + x^{n-1-k} - x^{n-k} - \cdots - x^n = 0.$$

Andererseits hat diese Gleichung nach § 2 die einzige positive Wurzel λ_{n-1-k}; es gilt also (12).

Aus wiederholter Benutzung von § 2 und (12) folgt nun

$$\begin{aligned} M_{n-1-k} &= 1 + \lambda_{n-1-k} + \cdots + \lambda_{n-1-k}^k \\ &= 1 + \frac{1}{\lambda_k} + \cdots + \frac{1}{\lambda_k^k} = \lambda_k M_k, \end{aligned}$$

womit auch (11) als richtig erkannt ist.

Anmerkung: Hieraus kann man schon für das k-te Maximum von links eine untere und obere Beschränkung durch das k-te Maximum von rechts ablesen:

Für $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$ ergibt sich aus (11) wegen $\lambda_k \leqq 1$ nach (10)

$$M_{n-1-k} \leqq M_k.$$

Für dasselbe k folgt ferner aus (11)

$$\begin{aligned} M_k - M_{n-1-k} &= (1 - \lambda_k) M_k = (1 - \lambda_k)(1 + \lambda_k + \cdots + \lambda_k^{n-1-k}) \\ &= 1 - \lambda_k^{n-k} < 1. \end{aligned}$$

Es gilt also für $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$

$$M_{n-1-k} \leqq M_k < M_{n-1-k} + 1.$$

§ 4. Beweis des Satzes 2.

Beweis: Nach Satz 1 genügt λ_k der Gleichung

$$1 + x + \cdots + x^k - x^{k+1} - \cdots - x^n = 0$$

und λ_{k+1} der Gleichung

$$1 + x + \cdots + x^k + x^{k+1} - x^{k+2} - \cdots - x^n = 0.$$

Für $x = \lambda_k$ wird das zu λ_{k+1} gehörige Polynom positiv, während es für $x = 2$ negativ ist. Hieraus folgt wegen $\lambda_k < 2$ nach § 2 die Ungleichung

$$\lambda_k < \lambda_{k+1}, \tag{13}$$

d. h. bei festem n wachsen die zu den M_k gehörigen Wurzeln λ_k durchweg monoton mit k.

Sei $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1$, so soll zunächst $M_k < M_{k+1}$ bewiesen werden. Zur Ersparung von Indizes heiße jetzt x die zu M_k und y die zu M_{k+1} gehörige Wurzel. Nach der Vorbemerkung und (10) ist jedenfalls

$$0 < x < 1, \quad 0 < y \leqq 1, \quad y - x > 0. \tag{14}$$

Weiterhin gilt nach (2)

$$M_k = \frac{1}{x^{k+1}}(1 + x + \cdots + x^k) = 1 + x + \cdots + x^{n-1-k}$$

und $$M_{k+1} = \frac{1}{y^{k+2}}(1 + y + \cdots + y^{k+1}) = 1 + y + \cdots + y^{n-2-k}.$$

Hieraus folgen

$$M_{k+1} - M_k = (y - x) + (y^2 - x^2) + \cdots + (y^{n-2-k} - x^{n-2-k}) - x^{n-1-k} \tag{15}$$

und

$$M_{k+1} - M_k = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{y^{k+1}} - \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \frac{1}{y^{k+2}} \tag{16}$$

$$= \frac{x-y}{xy} + \frac{x^2-y^2}{(xy)^2} + \cdots + \frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{(xy)^{k+1}} + \frac{1}{y^{k+2}}.$$

Der Beweis wird indirekt erbracht. Die Differenz $M_{k+1} - M_k$ sei also nicht positiv, entgegen der Behauptung; dann folgt aus (15)

$$y - x \leqq \frac{x^{n-1-k}}{1 + (y+x) + (y^2 + yx + x^2) + \cdots + (y^{n-3-k} + \cdots + x^{n-3-k})} \tag{17}$$

und aus (16) nach Multiplikation mit $x^{k+1}y^{k+2}$

$$(18)\quad y(y-x) \geqq \frac{x^{k+1}}{(xy)^k+(xy)^{k-1}(y+x)+(xy)^{k-2}(y^2+yx+x^2)+\cdots+(y^k+\cdots+x^k)}.$$

Nach (14) sind beide Seiten dieser Ungleichungen positiv, man darf also (17) durch (18) dividieren und erhält

$$(19)\quad \frac{1}{y} \leqq x^{n-2-2k}\,\frac{(xy)^k+(xy)^{k-1}(y+x)+\cdots+(y^k+\cdots+x^k)}{1+(y+x)+\cdots+(y^{n-3-k}+\cdots+x^{n-3-k})}.$$

Für $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]-1$ besitzt der Nenner des Bruches auf der rechten Seite von (19) mindestens ebensoviele Glieder wie der Zähler. Ferner sind die Glieder im Zähler wegen (14) sämtlich kleiner als die entsprechenden Glieder im Nenner, nur für das letzte Glied kann höchstens Gleichheit auftreten. Der Bruch ist demnach $\leqq 1$, und Gleichheit besteht nur für $n=3$ nebst $k=0$. Weiterhin ist aber $x^{n-2-2k}<1$ wegen $x<1$ und $n-2k-2 \geqq 1$. Hiernach ergibt sich aus (19)

$$\frac{1}{y}<1$$

im Widerspruch gegen (14).

Für $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]-1$ ist also $M_{k+1}-M_k$ positiv, womit der erste Teil des Satzes 2 bewiesen ist.

Wir wenden uns nun zum zweiten Teil der Behauptung.

Nach dem vorangegangenen Beweis ist für $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]-1$

$$M_k < M_{k+1}.$$

Hieraus wird unter Benutzung von (11)

$$\frac{M_{n-1-k}}{\lambda_k} < \frac{M_{n-1-(k+1)}}{\lambda_{k+1}},$$

woraus wegen (13) erst recht

$$M_{n-1-k} < M_{n-1-(k+1)}$$

folgt. Damit ist man für ungerades n fertig; denn hier wird auf der rechten Seite für $k \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]-1$ auch von rechts her der Index $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ erreicht. Für gerades n gelangt man rechts nur bis zum Index $\frac{n}{2}$, so daß in diesem Falle noch

$$M_{\frac{n}{2}} < M_{\frac{n}{2}-1}$$

zu beweisen bleibt. Dies folgt aber sofort aus (11) für $k = \frac{n}{2} - 1$; denn nach (10) ist $\lambda_{\frac{n}{2}-1} < 1$.

Der zweite Teil der Behauptung ist also ebenfalls erwiesen.

Anmerkung: Hiermit hat sich ergeben, daß der in der Problemstellung erwähnte Quotient $\frac{B}{A}$ ein Maximum M hat und daß

$$M = M_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

ist.

§ 5. Beweis des Satzes 3.

Beweis: Nach Satz 2 ist $M = M_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werde in diesem Paragraphen der Index $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ bei $\lambda_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ weggelassen: $\lambda_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} = \lambda$.

Bei ungeradem n wird nun $\left[\frac{n-1}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$ und

$$M = M_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} = \frac{1}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}}\left(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{\frac{n-1}{2}}\right) = 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{\frac{n-1}{2}}.$$

Hier ist $\lambda = 1$ und demnach $M = \frac{n+1}{2}$, womit der Fall des ungeraden n schon erledigt ist.

Bei geradem n wird $\left[\frac{n-1}{2}\right] = \frac{n-2}{2}$ und

$$M = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\left(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{\frac{n-2}{2}}\right) = 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{\frac{n}{2}}. \tag{20}$$

Hieraus folgt schon wegen $\lambda < 1$ die Abschätzung

$$\frac{n}{2} < M < \frac{n+2}{2}. \tag{21}$$

Aus (20) ergibt sich

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}}\left(M - \lambda^{\frac{n}{2}}\right) = M$$

und damit

$$\lambda^{\frac{n}{2}} = \frac{M}{M+1}. \tag{22}$$

Ferner erhält man aus (20) nach Multiplikation mit $1-\lambda$

$$1-\lambda^{\frac{n}{2}}=\lambda^{\frac{n}{2}}\left(1-\lambda^{\frac{n+2}{2}}\right),$$

was unter Benutzung von (22)

$$1-\frac{M}{M+1}=\frac{M}{M+1}\left(1-\lambda\frac{M}{M+1}\right),$$

d. h.

$$\lambda=\frac{M^2-1}{M^2} \tag{23}$$

ergibt. Durch Multiplikation von (22) und (23) erhält man noch

$$\lambda^{\frac{n+2}{2}}=\frac{M-1}{M}. \tag{24}$$

Schließlich folgt aus (23) und (24)

$$\log\left(1-\frac{1}{M}\right)=\frac{n+2}{2}\log\left(1-\frac{1}{M^2}\right).$$

Da nach (21) $M>\frac{n}{2}\geqq 1$ ist, gilt also die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{M}+\frac{1}{2M^2}+\frac{1}{3M^3}+\cdots=\frac{n+2}{2}\left(\frac{1}{M^2}+\frac{1}{2M^4}+\frac{1}{3M^6}+\cdots\right).$$

Die Reihen konvergieren absolut, man darf also die Glieder mit geradem Exponenten auf der rechten Seite vereinigen und erhält

$$M\frac{1+\frac{1}{3M^2}+\frac{1}{5M^4}+\cdots}{1+\frac{1}{2M^2}+\frac{1}{3M^4}+\cdots}=\frac{n+1}{2}. \tag{25}$$

Offenbar ist der Bruch auf der linken Seite von (25) kleiner als 1, so daß wegen $n\geqq 2$ in allen Fällen

$$M>\frac{3}{2}$$

ist.

Der Rest ist eine leichte Rechenarbeit, die sich nach bekannten Verfahren erledigt. Nach (25) hat man die Funktion

$$w=z\frac{1+\frac{1}{3}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{2\varkappa+1}\frac{1}{z^{2\varkappa}}+\cdots}{1+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{\varkappa+1}\frac{1}{z^{2\varkappa}}+\cdots}$$

zu betrachten, und zwar für $z>\frac{3}{2}$.

Man entwickelt w durch Division in eine Reihe und erhält

$$w = z - \frac{1}{6}\frac{1}{z} - \frac{1}{20}\frac{1}{z^3} - \frac{67}{2520}\frac{1}{z^5} - \frac{29}{1680}\frac{1}{z^7} - \frac{827}{66528}\frac{1}{z^9} - \frac{\varepsilon_1}{332640}\frac{1}{z^{11}}$$

mit $$3173 < \varepsilon_1 < 4620.$$

Hieraus berechnet man durch Koeffizientenvergleich als inverse Funktion

$$z = w + \frac{1}{6}\frac{1}{w} + \frac{1}{45}\frac{1}{w^3} + \frac{19}{7560}\frac{1}{w^5} + \frac{\varepsilon}{3240}\frac{1}{w^7}$$

mit $$0 < \varepsilon < 1.$$

Setzt man hierin wieder $z = M$ und $w = \frac{n+1}{2}$ ein, so ist auch der Fall eines geraden n erledigt. Offenbar läßt sich M nach dem obigen Verfahren für alle n mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen.

Zur Veranschaulichung sollen noch die Verhältnisse in den Fällen $n = 2$ und 3 angegeben werden.

Für $n = 2$ ergibt sich

$$(1 - x - x^2) : \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + x,$$

hier ist also $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $M = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Für $n = 3$ hat man

$$(1 + x - x^2 - x^3) : (1 - x) = 1 + 2x + x^2,$$

so daß also $\lambda = 1$ und $M = 2$ wird.

§ 6. Beweis des Satzes 4.

Beweis: Werden die zu den Maxima $M_k(n)$ und $M_k(n+1)$ gehörigen Nullstellen mit λ bzw. μ bezeichnet, so ist nach (2)

$$M_k(n) = \frac{1}{\lambda^{k+1}}(1 + \lambda + \cdots + \lambda^k) = 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1-k}$$

und

$$M_k(n+1) = \frac{1}{\mu^{k+1}}(1 + \mu + \cdots + \mu^k) = 1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1-k} + \mu^{n-k}.$$

Wäre nun $\lambda \leqq \mu$, so würde links $M_k(n) \geqq M_k(n+1)$ folgen, dagegen rechts $M_k(n) < M_k(n+1)$, was einen Widerspruch ergibt. Es muß

demnach $\lambda > \mu$ sein; dann folgt aus den linken Seiten der beiden Gleichungen

$$M_k(n) < M_k(n+1),$$

d. h. die Maxima $M_k(n)$ wachsen monoton mit n.

Benutzt man die nach (11) bestehende Beziehung

$$M_{n-1-k} = \lambda_k M_k,$$

so ergibt die gleiche Betrachtung, daß auch die Maxima $M_{n-1-k}(n)$ monoton mit n wachsen.

Bildet man nun für festes k den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} M_k(n)$, so ergibt sich für diesen

$$\frac{1}{\lambda^{k+1}}(1 + \lambda + \cdots + \lambda^k) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots = \frac{1}{1-\lambda};$$

denn nach (10) ist $\lambda < 1$ von einem genügend großen n ab. Nach Multiplikation mit $1 - \lambda$ erhält man

$$\lambda = 2^{-\frac{1}{k+1}}.$$

Der Grenzwert existiert also, und es wird

$$\lim_{n\to\infty} M_k(n) = \frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{k+1}}} = K.$$

Aus der schon benutzten Beziehung (11) ergibt sich nun auch ohne weiteres

$$\lim_{n\to\infty} M_{n-1-k}(n) = \frac{2^{-\frac{1}{k+1}}}{1 - 2^{-\frac{1}{k+1}}} = K - 1.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung von Satz 4 bewiesen.

Zum Beweis der Formeln (3) und (4) genügt es nunmehr,

$$K \leqq \frac{k}{\log 2} + 2$$

zu zeigen. Für $k = 0$ ist dies offenbar richtig; denn hier wird $K = 2$.

Bekanntlich gilt nach CAUCHY für jedes α mit $0 < \alpha < 2\pi$ die Entwicklung

$$\frac{1}{1-e^{-\alpha}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!}\alpha - \frac{B_2}{4!}\alpha^3 + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!}\alpha^{2\nu-1} + \cdots,$$

worin die B_ν die BERNOULLIschen Zahlen sind, und die Reihe konvergiert in dem angegebenen Intervall. Bricht man die Entwicklung

bei einem beliebigen Gliede mit positivem Exponenten von α ab, so multipliziert sich dieses Glied mit einem Faktor, der zwischen 0 und 1 liegt.[3])

Setzt man $\alpha = \frac{\log 2}{k+1}$ ein, so erhält man die Entwicklung für K. Bricht man beim dritten Gliede ab, so erhält man für $k \geqq 1$

$$K < \frac{k+1}{\log 2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\frac{\log 2}{k+1} \leqq \frac{k}{\log 2} + \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{24} < \frac{k}{\log 2} + 2,$$

w. z. b. w.

Aus den Beweisen der Paragraphen 2 und 6 ergibt sich leicht die folgende Erweiterung der Sätze 1 und 4 auf Potenzreihen.

Zusatz: *Die Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

habe den Konvergenzradius R, und die absoluten Beträge ihrer Koeffizienten seien nach oben beschränkt:

$$A = \operatorname{Max}(|a_0|, |a_1|, \ldots).$$

Ferner sei $f(\lambda) = 0$ mit $0 < |\lambda| \leqq R$. Bildet man

$$\frac{f(z)}{1 - \frac{z}{\lambda}} = g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots,$$

so hat $g(z)$ denselben Konvergenzradius R, und es gilt:

Bei festem Index k erreicht der Quotient $Q'_k = \frac{|b_k|}{A}$ für die Potenzreihe

$$f_k(z) = 1 + z + \cdots + z^k - z^{k+1} - z^{k+2} - \cdots$$

und $\lambda = 2^{-\frac{1}{k+1}}$ sein Maximum M'_k, und es ist

$$M'_k = \frac{2^{-\frac{1}{k+1}}}{1 - 2^{-\frac{1}{k+1}}} = K - 1.$$

Insbesondere ergibt sich also die Abschätzung

$$Q'_k \leqq \frac{k}{\log 2} + 1.$$

Hier erhält man für M'_k wegen der veränderten Form des Linearfaktors $\lim_{n\to\infty} \lambda_k M'_k(n) = K - 1$ *und nicht* $\lim_{n\to\infty} M'_k(n) = K$.

3) Vgl. z. B. J.-A. Serret, *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, Bd. 2, Leipzig 1899, S. 170.

§ 7. Ein zweiter Hilfssatz.

Hilfssatz 2: *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen des Satzes 1 gelten für die Quotienten Q_k in Abhängigkeit von λ folgende vom Grade n unabhängige obere Schranken:*

Für $|\lambda| = 1$ *ist*

$$Q_k \leqq k + 1 \tag{26}$$

und

$$Q_{n-1-k} \leqq k + 1. \tag{27}$$

Für $|\lambda| \neq 1$ *ist*

$$Q_k < \frac{1}{|1 - |\lambda||}. \tag{28}$$

Beweis: Die Formeln (7) und (8) gelten auch für beliebige λ. Aus ihnen folgen wegen $\frac{|a_\nu|}{A} \leqq 1$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ die Ungleichungen

$$Q_k \leqq \frac{1}{|\lambda|^{k+1}}(1 + |\lambda| + \cdots + |\lambda|^k) \tag{29}$$

und

$$Q_k \leqq 1 + |\lambda| + \cdots + |\lambda|^{n-1-k}. \tag{30}$$

Für $|\lambda| = 1$ ergeben (29) und (30)

$$Q_k \leqq \operatorname{Min}(k + 1, n - k),$$

womit die Behauptungen (26) und (27) schon bewiesen sind.

Für $|\lambda| < 1$ folgt aus (30)

$$Q_k \leqq 1 + |\lambda| + \cdots + |\lambda|^{n-1-k} < \frac{1}{1 - |\lambda|},$$

während sich für $|\lambda| > 1$ aus (29)

$$Q_k \leqq \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \cdots + \frac{1}{|\lambda|^k}\right) < \frac{1}{|\lambda|}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - 1}$$

ergibt, was die Gültigkeit von (28) zeigt.

Anmerkung: Auch Hilfssatz 2 läßt sich für Potenzreihen formulieren. Man erhält mit den Bezeichnungen des Zusatzes in § 6:

Für $|\lambda| = 1$ *ist* $\quad Q'_k \leqq k + 1.$

Für $|\lambda| \neq 1$ *ist* $\quad Q'_k \leqq \frac{|\lambda|}{|1 - |\lambda||}.$

§ 8. Beweis des Satzes 5.

Beweis: Für $m = 1$ ergibt sich $Q_k^{(1)} = Q_k$, in diesem Falle liefert Satz 4 die Richtigkeit der Behauptungen (5) und (6); denn es ist ja $Q_k \leqq M_k$. Damit ist der Boden für einen Induktionsschluß nach dem Grad m gegeben. Für den Grad $m-1$ werden also die Formeln (5) und (6) als bewiesen angenommen.

Zunächst soll die Gültigkeit von (5) gezeigt werden.

Bezeichnet man die Nullstellen von $g(x)$ mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$, so werden die folgenden beiden Fälle unterschieden:

1. Es sei $|\varrho_\mu| \leqq 1 - \frac{1}{k+2}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

Hier lehrt wiederholte Anwendung von (28)

$$Q_k^{(m)} < \prod_{\mu=1}^{m} \frac{1}{1-|\varrho_\mu|} \leqq (k+2)^m,$$

womit dieser Fall schon erledigt ist.

2. Es gebe wenigstens eine Nullstelle von $g(x)$, z. B. ϱ_m, mit

$$|\varrho_m| > 1 - \frac{1}{k+2}. \tag{31}$$

Setzt man in diesem Falle

$$\frac{f(x)\,(x-\varrho_m)}{h(x)} = e_0 + e_1 x + \cdots + e_{n-m+1} x^{n-m+1}, \tag{32}$$

so ist nach Induktionsannahme

$$|e_k| = A Q_k^{(m-1)} < \frac{1}{\log 2} (k+2)^{m-1} A \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n-m+1. \tag{33}$$

Um nun $$\frac{f(x)}{h(x)} = d_0 + d_1 x + \cdots + d_{n-m} x^{n-m}$$

zu erhalten, muß noch die rechte Seite von (32) durch den Linearfaktor $x - \varrho_m$ dividiert werden. Jetzt wendet man die für beliebige λ gültige Formel (7) an, dabei wird man offensichtlich nicht durch die geänderte Form des Linearfaktors gestört. Es ergibt sich

$$|d_k| \leqq \frac{1}{|\varrho_m|^{k+1}} (|e_0| + |e_1||\varrho_m| + \cdots + |e_k||\varrho_m|^k). \tag{34}$$

Hierauf wird (33) in (34) eingesetzt und durch $\frac{A}{\log 2}$ dividiert:

$$Q_k^{(m)} \log 2 < \frac{1}{|\varrho_m|^{k+1}} (2^{m-1} + 3^{m-1}|\varrho_m| + \cdots + (k+2)^{m-1}|\varrho_m|^k).$$

Wegen (31) gilt diese Ungleichung erst recht, wenn $|\varrho_m|$ durch $\frac{k+1}{k+2}$ ersetzt wird. Dann enthält die Klammer $k+1$ Summanden, die von links nach rechts monoton wachsen, wie man leicht findet, indem man die Quotienten je zweier aufeinanderfolgender Glieder bildet.

Hieraus ergibt sich schließlich

$$Q_k^{(m)} \log 2 < \frac{(k+2)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} (k+1)(k+2)^{m-1} \frac{(k+1)^k}{(k+2)^k} = (k+2)^m.$$

Damit ist der Induktionsschluß vollständig durchgeführt und (5) bewiesen.

Ganz entsprechend wird die Behauptung (6) erledigt:

1. Ist $|\varrho_\mu| \geqq 1 + \frac{1}{k+1}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, m$, so ergibt wiederholte Anwendung von (28)

$$Q_{n-m-k}^{(m)} < \prod_{\mu=1}^{m} \frac{1}{|\varrho_\mu| - 1} \leqq (k+1)^m.$$

2. Es gebe wenigstens eine Nullstelle von $g(x)$, z. B. ϱ_m, mit

$$|\varrho_m| < 1 + \frac{1}{k+1}. \tag{35}$$

(32) bleibt erhalten, dann ist nach Induktionsannahme

$$|e_{n-(m-1)-k}| < \frac{1}{\log 2} (k+1)^{m-1} A. \tag{36}$$

Aus (8) folgt nun

$$|d_{n-m-k}| \leqq (|e_{n-(m-1)-k}| + |e_{n-(m-1)-k}||\varrho_m| + \cdots + |e_{n-(m-1)}||\varrho_m|^k), \tag{37}$$

und aus (36) und (37) ergibt sich mit (35)

$$Q_{n-m-k}^{(m)} \log 2 < \left((k+1)^{m-1} + k^{m-1} \frac{k+2}{k+1} + \cdots + \frac{(k+2)^k}{(k+1)^k}\right) \leqq (k+1)(k+1)^{m-1},$$

d. h. es besteht (6).

Anmerkungen: 1. Zur Veranschaulichung sei auf das folgende Beispiel hingewiesen:

$$f(x) = (1 + x + \cdots + x^k) \prod_{\mu=1}^{m} (1 - x^{\mu(k+1)}).$$

Als Koeffizienten treten hier nur die Zahlen $+1$ und -1 auf, so daß $A = 1$ wird. Insbesondere sind die $k+1$ ersten Koeffizienten

alle gleich $+1$. Ferner ist $f(x)$ offensichtlich durch $(1-x)^m$ teilbar. Nach (7) ergibt sich nun durch stufenweise Division durch die Linearfaktoren $1-x$ für $\varkappa = 0, 1, \ldots, k$

$$Q_\varkappa^{(1)} = \varkappa + 1,$$

$$Q_\varkappa^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{\varkappa}(\nu+1) = \binom{\varkappa+2}{2},$$

. . . . . .

$$Q_\varkappa^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{\varkappa}\binom{\nu+m-1}{m-1} = \binom{\varkappa+m}{m}.$$

2. Weiterhin sei darauf hingewiesen, daß sich der Sonderfall eines Divisors von der Form $\lambda - x^m$ auf den früher behandelten Fall eines Linearfaktors zurückführen läßt. Ist nämlich

$$\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{\lambda - x^m} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-m} x^{n-m},$$

so erhält man für $q = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\frac{a_q + a_{m+q} x^m + a_{2m+q} x^{2m} + \cdots + a_{pm+q} x^{pm}}{\lambda - x^m} = b_q + b_{m+q} x^m + \cdots + b_{(p-1)m+q} x^{(p-1)m}.$$

Hierin ist $\quad p = \left[\frac{n}{m}\right]$ für $q \leqq n - m\left[\frac{n}{m}\right]$,

$$p = \left[\frac{n}{m}\right] - 1 \text{ für } q > n - m\left[\frac{n}{m}\right].$$

Setzt man nun $x^m = z$, so ist der Fall des Linearfaktors erreicht.

3. Schließlich sei noch bemerkt, daß sich Satz 5 ebenfalls auf Potenzreihen übertragen läßt. Beachtet man den Zusatz in § 6, so ergibt sich hier für die sinngemäß erklärten Quotienten $Q_k'^{(m)}$ die Abschätzung

$$Q_k'^{(m)} < \frac{1}{\log 2}(k+1)^m.$$

§ 9. Beweis für die Regel.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, lehrt die Substitution $x = \varrho y$, daß der Satz nur für $\varrho = 1$ bewiesen werden muß. Hierzu wird noch $A_\nu(1) = A_\nu$ gesetzt.

Bildet man

$$\frac{f(x)}{\omega_1 - x} = a_{01} + a_{11} x + a_{21} x^2 + \cdots + a_{n-2,1} x^{n-2} - x^{n-1},$$

worin die zweiten Indizes die Anzahl der Linearfaktoren im Divisor angeben, so gilt entsprechend zu (7) für jedes $\varkappa = 0, 1, \ldots, n-2$

$$a_{\varkappa 1} = \frac{a_0 + a_1\omega_1 + \cdots + a_\varkappa \omega_1^{\varkappa}}{\omega_1^{\varkappa+1}}.$$

Hieraus folgt

$$|a_{\varkappa 1}| \leqq A_{n-\varkappa}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1^2} + \cdots + \frac{1}{r_1^{\varkappa+1}}\right) < \frac{A_{n-\varkappa}}{r_1 - 1}.$$

Setzt man nun die Division stufenweise fort, so ergibt sich schließlich

$$\frac{f(x)}{(\omega_1 - x)(\omega_2 - x)\ldots(\omega_{m-1} - x)} = a_{0,m-1} + a_{1,m-1}x + a_{2,m-1}x^2 + \cdots + a_{n-m,m-1}x^{n-m} + (-1)^{m-1}x^{n-m+1}$$

mit

$$(38)\quad |a_{\varkappa,m-1}| < \frac{A_{n-\varkappa}}{(r_1-1)(r_2-1)\ldots(r_{m-1}-1)} \leqq \frac{A_m}{(r_1-1)(r_2-1)\ldots(r_{m-1}-1)},$$

da hier $\varkappa$ nur noch von 0 bis $n-m$ läuft. Da nun nach einer bekannten Regel

$$(39)\qquad r_m < \operatorname{Max}(|a_{1,m-1}|, |a_{2,m-1}|, \ldots, |a_{n-m,m-1}|) + 1$$

ist, so folgt aus den Ungleichungen (38) und (39), wie behauptet wurde,

$$(r_1 - 1)(r_2 - 1)\ldots(r_m - 1) < A_m.$$

Lebenslauf.

Ich, Karl-Friedrich Kirstein, bin am 12. Februar 1905 in Grimmen (Pommern) als Sohn des Maurers Ernst Kirstein und seiner Ehefrau Ottonie geb. Krohn geboren. Durch den Krieg verlor ich meinen Vater, der im September 1914 in Frankreich gefallen ist. Nachdem ich zunächst die Volksschule in Berlin besucht hatte, wurde ich Freischüler der Hindenburg-Realschule zu Charlottenburg. Anschließend besuchte ich die Siemens-Oberrealschule zu Charlottenburg. Nachdem ich dort Ostern 1924 das Abiturientenexamen bestanden hatte, trat ich als kaufmännischer Lehrling in eine Metallgroßhandlung ein. Nach Beendigung der Lehrzeit Ostern 1926 verblieb ich ein Jahr als kaufmännischer Angestellter in der Firma. Da ich eine besondere Neigung für die mathematischen Wissenschaften hatte, entschloß ich mich trotz schwieriger häuslicher Verhältnisse zum Studium der Mathematik, Physik und Philosophie. Im Sommersemester 1928 bezog ich die Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. Infolge meiner schlechten finanziellen Lage konnte ich mein Studium nur mit Unterbrechungen durchführen. Nachdem ich unter anderem als Werkstudent in der Industrie gearbeitet hatte, wurde es mir im Wintersemester 1933 möglich, das Studium endgültig wieder aufzunehmen.